Devoir sur Table 2

Durée : 4h

1. Les exercices sont indépendants. Ils peuvent être traités dans un ordre quelconque.
2. Tous les documents sur papier sont interdits.
3. Les calculatrices ne sont pas autorisées.
4. Le matériel de géométrie (règle, compas, équerre) est autorisé.
5. La notation des copies tiendra compte dans une large mesure de la qualité de la rédaction. Ceci implique que vous devez faire des raisonnements clairs, concis et complets, utiliser un langage mathématiques adapté et précis, être lisible et éviter les fautes d'orthographe et de grammaire.
6. Si, au cours du devoir, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous le signalez sur votre copie et poursuivez sa composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.
7. Mettez en évidence vous résultats en les encadrant.
8. Conformément au règlement de la Banque PT
   - Composer lisiblement sur les copies avec un stylo à bille à encre foncée : bleue ou noire.
   - L'usage de liquide de correction et dérouleur de ruban correcteur est interdit.

Le soin apporté à la copie fera l'objet d'une évaluation suivant les critères suivants :
- Mise en évidence des résultats
- Soin et lisibilité de la copie. En particulier les traits, y compris pour les ratures, devront être tracés à l'aide d'une règle
- Respect des consignes concernant le liquide de correction et le dérouleur de ruban correcteur
- Respect de la grammaire et de l'orthographe

Exercice 1

(*d'après I.S.F.A 2006*)

Soit $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+)$ l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ continues à valeurs réelles. Pour $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+)$ on note F l'unique primitive de f qui s'annule en 0.

Soit E le sous-ensemble des fonctions f de $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+)$ telles que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{F(t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

Pour $f \in E$ on note $I(f)$ l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{F(t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$.

Partie I — Étude de quelques propriétés de l'application $f \mapsto I(f)$

1. Déterminer les fonctions f de E positives et telles que $I(f) = 0$.
2. Soit f une fonction de $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+)$ positive. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t$ est convergente si et seulement si $f \in E$.

   On pourra utiliser une intégration par parties.
3. Donner un exemple de fonction f appartenant à E et telle que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t$ diverge.
4. Pour $f \in E$, montrer, en justifiant l'existence de l'intégrale, la relation

$$I(f) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{F(t) + F\left(\frac{1}{t}\right)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$$

Partie II — Un cas particulier

On note J et K les intégrales

$$J = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad K = \int_0^1 \frac{-\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que les intégrales J et K convergent.
2. Montrer l'égalité des intégrales J et K
3. (a) Montrer que, pour tout $t \in]0,1[$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{\ln(t)}{1+t} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-t)^k \ln(t) + \dfrac{(-t)^{n+1}\ln(t)}{1+t}$.

   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 t^n \ln(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{-1}{(n+1)^2}$

   (c) Justifier qu'il existe un réel $M \in \mathbb{R}$ tel que
   $$\forall t \in]0,1], \qquad \left|\frac{t\ln(t)}{1+t}\right| \leqslant M$$

   (d) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}\ln(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t = 0$

   (e) On admet que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$

   Montrer enfin que la valeur commune à J et K est égale à $-\dfrac{\pi^2}{12}$.
4. Soit f la fonction de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

   (a) Montrer que f appartient à E

   (b) Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$.

   (c) Exprimer $F(1)$ en fonction de K
5. (a) Calculer, pour $x > 0$, $f(x) - \dfrac{1}{x^2}f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ et en déduire $F(x) + F\left(\dfrac{1}{x}\right)$

   (b) Montrer que $I(f) = \dfrac{1}{4}\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\frac{\ln(t)}{1+t}\right)^2\mathrm{d}t - K$
6. Exprimer J en fonction de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1\left(\frac{\ln(t)}{1+t}\right)^2\mathrm{d}t$
7. Montrer que $\displaystyle\int_0^1\left(\frac{\ln(t)}{1+t}\right)^2\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty}\left(\frac{\ln(t)}{1+t}\right)^2\mathrm{d}t$
8. En déduire $I(f)$.

Exercice 2

(d'après Oral ESCP)

Préambule

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite convexe lorsque

$$\forall (x,y) \in I, \quad \forall t \in [0,1], \qquad f(tx+(1-t)y) \leqslant tf(x) + (1-t)f(y)$$

1. Soit f une fonction dérivable sur I. Soit $(x,y) \in I$ avec $x < y$ et soit $t \in [0,1]$.

   (a) Montrer qu'il existe $a \in [x, tx+(1-t)y]$ tel que $f(tx+(1-t)y) - f(x) = (1-t)(y-x)f'(a)$

   (b) Montrer qu'il existe $b \in [tx+(1-t)y, y]$ tel que $f(y) - f(tx+(1-t)y) = t(y-x)f'(b)$
2. On suppose que f' est croissante, montrer qu'alors
   $$t\left(f(tx+(1-t)y) - f(x)\right) \leqslant (1-t)f(y) - f(tx+(1-t)y)$$
   En déduire que f est convexe.
3. Montrer que la fonction $x \mapsto -\ln(x)$ est convexe sur $]0,+\infty[$.

Partie I — Inégalité de Hölder

4. Soit f et g deux fonctions continues sur $]0,+\infty[$ à valeurs strictement positives telles que les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent et valent 1. Soit λ un réel de $[0,1]$

(a) Montrer que, pour $(x, y) \in]0, +\infty[^2$, $\ln(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqslant \lambda \ln(x) + (1-\lambda)\ln(y)$

(b) Montrer que

$$\forall t > 0, \qquad (f(t))^\lambda (g(t))^{1-\lambda} \leqslant \lambda f(t) + (1-\lambda)g(t)$$

(c) En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} (f(t))^\lambda (g(t))^{1-\lambda}\,\mathrm{d}t$ converge et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} (f(t))^\lambda (g(t))^{1-\lambda}\,\mathrm{d}t \leqslant 1$

5. Soit f et g deux fonctions continues sur $]0, +\infty[$ à valeurs strictement positives telles que les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent. Soit λ un réel de $[0, 1]$

En utilisant la question précédente, montrer que

$$\int_0^{+\infty} (f(t))^\lambda (g(t))^{1-\lambda}\,\mathrm{d}t \leqslant \left(\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t\right)^\lambda \left(\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t\right)^{1-\lambda}$$

Partie II — Fonctions Gamma et lnGamma

6. Montrer que, pour tout réel $x > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge.

On note alors, pour $x > 0$, $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$

(a) Montrer que, pour tout $x > 0$, $\Gamma(x) > 0$.

(b) Montrer que, pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ *on pourra procéder à une intégration par parties*

(c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$

7. On définit la fonction G sur $]0, +\infty[$ par $G : x \mapsto \ln(\Gamma(x))$

(a) Montrer que, pour tout $\lambda \in]0, 1[$ et tout couple $(x, y) \in]0, +\infty[^2$, on a

$$\Gamma(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \Gamma(x)^\lambda \Gamma(y)^{1-\lambda}$$

(b) Que peut-on en déduire sur la fonction G ?

8. Soit x et y deux réels strictement positifs, on suppose que $y \geqslant 1$.

(a) Montrer que $G(x+1) \leqslant \left(1 - \dfrac{1}{y}\right) G(x) + \dfrac{1}{y} G(x+y)$

(b) En déduire que $\Gamma(x+y) \geqslant x^y \Gamma(x)$

9. Soit x et y deux réels strictement positifs avec $y \leqslant 1$. Montrer que

$$\Gamma(x+y) \leqslant x^y \Gamma(x)$$

Exercice 3 — Endomorphismes cycliques

(*inspiré de Maths B 2012*)

Dans tout le problème, E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$.

On dit qu'un endomorphisme u de E est cyclique si, et seulement s'il existe un vecteur x de E et un entier n tel que la famille $\left(x, u(x), u^2(x), u^3(x), \cdots, u^{n-1}(x)\right)$ soit une base de E.

On rappelle que $u^0 = Id_E$ et que, pour tout entier k strictement positif $u^k = u \circ u^{k-1}$.

1. Dans cette question, $n = 3$. On considère l'endomorphisme g de E dont la matrice dans la base canonique de E est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Montrer que g est cyclique.

2. Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & P(X+1) - P(X) \end{array}$

(a) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$

(b) Déterminer $\mathrm{Ker}(\varphi)$.
(c) Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$, montrer que, si P est de degré k, $\varphi(P)$ est de degré $k-1$.
(d) En déduire $\mathrm{Im}(\varphi)$.
(e) Montrer que φ est un endomorphisme cyclique.

3. On considère dans cette question un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$. On rappelle que $n = \dim(E)$. Montrer que u est cyclique.
4. Soit φ un endomorphisme cyclique de E. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$ soit de la forme $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_1 \\ 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_n \end{pmatrix}$ où $(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n$.
5. Justifier qu'alors $\mathrm{Rang}(\varphi) \geqslant n-1$.

Exercice 4 Endomorphismes échangeurs

— On dit qu'un endomorphisme u de E possède la propriété $(\mathcal{P}1)$ lorsqu'il existe deux endomorphismes a et b de E vérifiant les trois égalités
$$u = a + b, \qquad a^2 = 0, \qquad b^2 = 0 \tag{$\mathcal{P}1$}$$
(0 désignant l'endomorphisme nul, et $a^2 = a \circ a$).

— On dit qu'un endomorphisme u de E possède la propriété $(\mathcal{P}2)$ lorsqu'il existe deux sous-espaces vectoriels (s.e.v) F et G de E vérifiant les trois propriétés
$$E = F \oplus G, \qquad u(F) \subset G, \qquad u(G) \subset F \tag{$\mathcal{P}2$}$$

1. **Un exemple :** Dans cette question seulement, E désigne $\mathbb{R}^5$. On considère la matrice
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
et f l'endomorphisme canoniquement associé à M. Justifier que f vérifie $(\mathcal{P}2)$.
2. On suppose dans cette question que u vérifie $(\mathcal{P}2)$. On considère deux s.e.v F et G de E vérifiant les trois propriétés $(\mathcal{P}2)$. On note p la projection sur F parallèlement à G et on définit enfin $a = u \circ p$.
   (a) Montrer que, si $x \in E$, $a(x) \in G$, puis $a^2(x) = 0_E$.
   (b) Montrer que u vérifie $(\mathcal{P}1)$.
3. On suppose dans cette question que u vérifie $(\mathcal{P}1)$. On note a et b deux endomorphismes vérifiant les égalités $(\mathcal{P}1)$. On suppose de plus $u \in \mathcal{GL}(E)$.
   (a) Établir une inclusion entre $\mathrm{Ker}(a)$ et $\mathrm{Im}(a)$.
   (b) Soit $x \in \mathrm{Im}(a)$. Montrer que $u(x) \in \mathrm{Im}(b)$.
   (c) Montrer que $\mathrm{Im}(a) \cap \mathrm{Im}(b) = \{0_E\}$.
   (d) Montrer que $\mathrm{Im}(a+b) \subset \mathrm{Im}(a) + \mathrm{Im}(b)$
   (e) Montrer que u vérifie $(\mathcal{P}2)$
4. On considère dans cette question un endomorphisme $u \in L(E)$ tel que $u^2 = 0$ et $u \neq 0$. Montrer que u vérifie $(\mathcal{P}2)$ (*on pourra considérer un supplémentaire de* $\mathrm{Ker}(u)$ *dans* E).
5. On considère dans cette question un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$. On rappelle que $n = \dim(E)$. On suppose que n est pair $n = 2m$.
   (a) Soit $x_0 \in E$ tel que $x_0 \notin \mathrm{Ker}(u^{n-1})$. Montrer que $\left(x_0, \ldots, u^{n-1}(x_0)\right)$ est une base de E.
   (b) En considérant la base $\mathcal{B}' = \left(x_0, u^2(x_0), \ldots, u^{2m-2}(x_0), u(x_0), u^3(x_0), \ldots, u^{2m-1}(x_0)\right)$, montrer que u vérifie $(\mathcal{P}2)$.